Matematička indukcija

Matematička tvrdnja je tačna (istinita) za svaki prirodan broj ($n \in \mathbb{N}$) ako su **ispunjena** sljedeća dva uslova:

a) BAZA INDUKCIJE

Tvrdnja je tačna za broj 1.

b) INDUKCISKI KORAK

Ako na osnovu pretpostavke da je tvrdnja tačna za $k \leq n$ $(k=1,2,\dots,n)$ slijedi da je istinita i za broj $n+1$.

(#) Matematičkom indukcijom dokazati da za sve prirodne brojeve važe sljedeće jednakosti:

a) $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

b) $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

R:

a) $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$

BAZA INDUKCIJE

Pokažimo da je tvrdnja tačna za $k=1$. $1=1^2$ Tvrdnja je tačna za $k=1$.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k=1,2,\dots,n$ tj. $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$ za sve k od 1 do n. Pokažimo da je tvrdnja tačna za $n+1$.

tj. pokažimo da $1+3+\dots+(2n+1)=(n+1)^2$

$$\underline{\underline{1+3+5+\dots+(2n-1)}}+(2n+1)\overset{\text{prema pretpostavci}}{=\!=}\underline{\underline{n^2}}+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

Dobili smo $1+3+5+\dots+(2n+1)=(n+1)^2$ što je i trebalo.

ZAKLJUČAK

Jednakost $1+3+\dots+(2n-1)=n^2$ je tačna za sve prirodne brojeve.

b) $1^3+2^3+3^3+\dots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$

BAZA INDUKCIJE

Pokažimo da je tvrdnja tačna za $k=1$. $1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2=1^2$ Tvrdnja je tačna za $k=1$

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$ za $\forall k=1,2,\ldots,n$

Na osnovu ove pretpostavke pokažimo da $1^3+2^3+\ldots+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

Imamo $1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^3}{4}=$

$=\frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

BAZA INDUKCIJE

... sami ...

KORAK INDUKCIJE

... $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$

$\overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=} \frac{n}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve

1. Dokazati da je $2^n \geq 2n$ za $\forall(n\in\mathbb{N})$.

Rj. $2^k \geq 2\cdot k$, k prirodan broj

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $2^1 \geq 2\cdot 1$ tj. $2\geq 2$ tačno

Za $k=1$ tvrdnja je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $2^k\geq 2k$ za svaki $k=1,2,\ldots,n$.

Na osnovu toga, dokažimo da je tačno i $2^{n+1}\geq 2(n+1)$.

$$\underline{\underline{2^{n+1}}}=2^n\cdot 2=2^n+2^n\geq 2^n+2 \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{\geq} 2n+2=\underline{\underline{2(n+1)}}$$

tj. $2^{n+1}\geq 2(n+1)$ što je i trebalo pokazati.

ZAKLJUČAK

Nejednakost $2^n\geq 2n$ je tačna za svaki prirodan broj.

(2.) Dokazati da je nejednakost $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ tačna za svaki prirodan broj.

Rj. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}$, $k=1,2,3 \ldots$

BAZA INDUKCIJE $k=1$: $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$ tj. $1 \geq 1$ tačno. Za $k=1$ nejednakost je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je nejednakost $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}$ tačna za svaki $k=1,2,\ldots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\text{prema pretpostavci}}{\geq} \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} > \frac{n+1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Nejednakost je tačna za svaki prirodan broj.

(3.) Metodom matematičke indukcije dokazati da je 5^n+2^{n+1} djeljiv sa 3 za svaki prirodan broj n.

Rj. Treba dokazati da je broj 5^k+2^{k+1} djeljiv sa 3 za $\forall k \in \mathbb{N}$.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $5^1+2^{1+1}=5+2^2=5+4=9$ 9 je djeljiv sa 3.

Za $k=1$ tvrdnja je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je 5^k+2^{k+1} djeljivo sa 3 za $k=1,2,\ldots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je i $5^{n+1}+2^{n+1+1}$ djeljivo sa 3.

$$5^{n+1}+2^{n+1+1}=5^{n+1}+2^{n+2}=5\cdot 5^n+2\cdot 2^{n+1}=2\cdot 5^n+2\cdot 2^{n+1}+3\cdot 5^n$$

$$=\underbrace{2(5^n+2^{n+1})}_{\text{ovaj dio je prema pretpostavci djeljiv sa 3}}+\underbrace{3\cdot 5^n}_{\text{ovo je djeljivo sa 3}}$$

Prema tome $5^{n+1}+2^{n+2}$ je djeljivo sa 3.

ZAKLJUČAK

5^k+2^{k+1} je djeljivo sa 3 za svaki prirodan broj k.

4. Metodom matematičke indukcije dokazati da jednakost $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ vrijedi za sve prirodne brojeve.

Rj. $1^3+2^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$, k je prirodan broj..

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $1^3=\frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4} \Rightarrow 1=\frac{4}{4} \Rightarrow 1=1$ što je tačno.

Za $k=1$ jednakost je tačna

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $1^3+2^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ tačno za $k=1,\ldots,n$

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$1^3+2^3+\ldots+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 \overset{\text{prema pretpostavci}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

5. Dokazati da je $4^n+15n-1$ djeljivo sa 9 za svaki prirodan broj n.

Rj. Treba dokazati da je $4^k+15k-1$ djeljivo sa 9 za $\forall(k\in N)$.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $4^1+15\cdot1-1=4+15-1=18$, 18 je djeljivo sa 9.

Tvrdnja je tačna za $k=1$.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $4^k+15\cdot k-1$ djeljivo sa 9 za $k=1,2,\ldots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je $4^{n+1}+15(n+1)-1$ tj. $4^{n+1}+15n+14$ djeljivo sa 9.

$$4^{n+1}+15n+14 = 4\cdot 4^n+15n-1+15 = 4\cdot 4^n+2\cdot 15n-2+16-15n =$$

$$= 4\cdot 4^n+4\cdot 15n-4+18-3\cdot 15n = 4(4^n+15n-1)+18-9\cdot 5n$$

$$= \underbrace{4(4^n+15n-1)}_{\text{ovo je prema pretpostavci djeljivo sa 9}} + \underbrace{9(2-5n)}_{\text{ovo je djeljivo sa 9}}$$

Prema tome $4^{n+1}+15n+14$ je djeljivo sa 9.

ZAKLJUČAK

$4^n+15n-1$ je djeljivo sa 9 za svaki prirodan broj n.

6. Dokazati Bernulijevu nejednakost $(1+h)^n \geq 1+n\cdot h$ gdje je $h>-1$, a n pozitivan cijeli broj.

Rj. $(1+h)^k \geq 1+k\cdot h$, $h\in\mathbb{R}$, $h>-1$, $k\in\mathbb{N}$.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $(1+h)^1 \geq 1+1\cdot h \Rightarrow 1+h\geq 1+h$ ovo je tačno

Za $k=1$ nejednakost je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $(1+h)^k \geq 1+k\cdot h$ za $k=1,2,\dots,n$, $h>-1$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h$$

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{\geq} (1+nh)(1+h) = 1+h+nh+nh^2 \overset{h^2\geq 0}{\geq}$$

$$1+h+nh = 1+(n+1)h$$ što je i trebalo dobiti.

ZAKLJUČAK

Nejednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

7. Metodom matematičke indukcije dokazati da jednakost $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\dots+n(3n-1)=n^2(n+1)$ vrijedi za sve prirodne brojeve n.

8. Fibonačijev niz $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$ je definisan rekurzivnom formulom $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ gdje su $a_1 = a_2 = 1$. Dokazati da je $NZD(a_n, a_{n+1}) = 1$ za sve prirodne brojeve n (NZD je skraćenica od najveći zajednički djelilac, npr. $NZD(14, 35) = 7$).

Rj. $a_1 = a_2 = 1$

$a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

Treba dokazati da je $NZD(a_k, a_{k+1}) = 1$, za $\forall k \in \mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $NZD(a_1, a_2) = NZD(1,1) = 1$ Tvrdnja je tačna za $k=1$.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $NZD(a_k, a_{k+1}) = 1$ za sve $k = 1, 2, \dots, n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je $NZD(a_{n+1}, a_{n+2}) = 1$.

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Označimo sa d NZD od brojeva a_{n+1} i a_{n+2} tj. $NZD(a_{n+1}, a_{n+2}) = d$.

Nađimo, čemu je d jednako? Odredimo d.

$NZD(a_{n+1}, a_{n+2}) = d \Rightarrow d \mid a_{n+1}$ (d djeli a_{n+1}) i $d \mid a_{n+2}$ (d djeli a_{n+2})

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_n = a_{n+2} - a_{n+1} \\ d \mid a_{n+1} \\ d \mid a_{n+2} \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid a_n \ (d \text{ djeli } a_n)$$

Prema pretpostavci
$$\left.\begin{array}{l} d \mid a_n \\ d \mid a_{n+1} \\ \text{i } NZD(a_n, a_{n+1}) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow d = 1$$
što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK:

$NZD(a_n, a_{n+1}) = 1$ za sve prirodne brojeve n, $\{a_n\}$ Fibon. niz

9. Dokazati da je broj $2^{2n} - 3n - 1$ djeljiv sa 9 za svaki prirodan broj veći od 1.

10. Metodom matematičke indukcije dokazati da jednakost
$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$
vrijedi za sve prirodne brojeve n.

11. Dokazati Moavrov obrazac $(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$.

Rj. $(\cos x+i\sin x)^k=\cos kx+i\sin kx$, $k\in\mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $(\cos x+i\sin x)^1=\cos x+i\sin x$, Za $k=1$. tvrdnja je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $(\cos x+i\sin x)^k=\cos kx+i\sin kx$ za $k=1,2,\dots,n$

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$(\cos x+i\sin x)^{n+1}=\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x.$$

$$(\cos x+i\sin x)^{n+1}=(\cos x+i\sin x)^n\cdot(\cos x+i\sin x)\ \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{}$$

$$=(\cos nx+i\sin nx)\cdot(\cos x+i\sin x)=\underline{\underline{\cos nx\cdot\cos x}}+i\cos nx\sin x$$

$$+i\sin nx\cos x+i^2\underline{\underline{\sin nx\sin x}}\overset{(*)}{=}$$

Adicione teoreme

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\overset{(*)}{=}\cos(nx+x)+i\sin(nx+x)=\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x$$

što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

12. Metodom matematičke indukcije dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost

$$1+q+q^2+\dots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\quad\text{gdje je } q\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Rj. $1+q+q^2+\dots+q^k=\dfrac{1-q^{k+1}}{1-q}$, $q\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $k\in\mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $1+q=\dfrac{1-q^{1+1}}{1-q}=\dfrac{1-q^2}{1-q}=\dfrac{(1-q)(1+q)}{(1-q)}$ tj. $1+q=1+q$

Za $k=1$ jednakost je tačna

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $1+q+q^2+\ldots+q^k=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}$ za $k=1,2,\ldots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+q^{n+1}\overset{\text{prema pretpostavci}}{=\!=}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q}$$

$$=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+1+1}}{1-q}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

13. Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nenegativni realni brojevi, onda aritmetičku sredinu (prosjek) definišemo kao broj $A=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$ i njegovu geometrijsku sredinu kao broj $G=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leq\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n).$$

[Nejednakost prelazi u jednakost akko je $x_1=x_2=\ldots=x_n$]

R.j. $A=\frac{1}{k}(x_1+x_2+\ldots+x_k)$, $G=\sqrt[k]{x_1x_2\ldots x_k}$, $G\leq A$, $k\in\mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $\sqrt[1]{x_1}\leq\frac{1}{1}(x_1)$ tj. $x_1\leq x_1$ Za $k=1$ nejednakost je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $\sqrt[k]{x_1x_2\ldots x_k}\leq\frac{1}{k}(x_1+x_2+\ldots+x_k)$ za $k=1,2,\ldots,n$.

Dokažimo da je $\sqrt[n+1]{x_1x_2\ldots x_{n+1}}\leq\frac{1}{n+1}(x_1+x_2+\ldots+x_{n+1})$.

Ne gubeći općost dokaza možemo smatrati da je $x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_{n+1}$ ...(*)

Označimo sa $A=\frac{1}{n+1}(x_1+x_2+\ldots+x_{n+1})$, i sa $G=\sqrt[n+1]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n+1}}$.

Primjetimo da vrijedi

$$x_1=\frac{1}{n+1}\underbrace{(x_1+x_1+\ldots+x_1)}_{(n+1)\text{ puta}}\overset{(*)}{\leq}A\overset{(*)}{\leq}\frac{1}{n+1}(x_{n+1}+x_{n+1}+\ldots+x_{n+1})=x_{n+1}\quad\ldots(**)$$

Posmatrajmo sada sljedeće brojeve $x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1+x_{n+1}-A$.

$(**) \Rightarrow \quad A-x_1 \geq 0 \quad ; \quad x_{n+1}-A \geq 0 \quad ; \quad x_1+x_{n+1}-A \geq 0$

Pa je
$$(A-x_1)\cdot(x_{n+1}-A) \geq 0$$
$$\underline{Ax_{n+1}} \,\underline{-A^2} - x_1x_{n+1} + \underline{Ax_1} \geq 0$$
$$A(x_1+x_{n+1}-A) \geq x_1x_{n+1}$$

Na n brojeva $x_2, x_3, \dots, x_n, \underline{x_1+x_{n+1}-A}$ primjenimo indukcisku pretpostavku, dobidemo:

$$\frac{1}{n}(x_2+x_3+\dots+x_n+\overbrace{x_1+x_{n+1}-A}) \geq \sqrt[n]{x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot(x_1+x_{n+1}-A)}$$

$$\left[\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1}-A)\right]^n \geq x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot(x_1+x_{n+1}-A)$$

$$\left[\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1}-A)\right]^n = \left[\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\dots+x_{n+1}-\frac{1}{n+1}(x_1+x_2+\dots+x_{n+1})\right)\right]^n =$$

$$x_1-\frac{x_1}{n+1} = \frac{x_1(n+1)-x_1}{n+1} = \frac{x_1\cdot n}{n+1}$$

$$x_2-\frac{x_2}{n+1} = \frac{x_2n+x_2-x_2}{n+1} = \frac{x_2\cdot n}{n+1}$$

$$\vdots$$

$$= \left[\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}(x_1+x_2+\dots+x_{n+1})\right)\right]^n =$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}(x_1+x_2+\dots+x_{n+1})\right]^n = A^n$$

Pa imamo
$$A^n \geq x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n(x_1+x_{n+1}-A) \quad /\cdot A$$

$$A^{n+1} \geq x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot A(x_1+x_{n+1}-A) \overset{\text{kako je } A(x_1+x_{n+1}-A)\geq x_1x_{n+1}}{\geq} x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n+1} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow A \geq \sqrt[n+1]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n+1}} \Longrightarrow \frac{1}{n+1}(x_1+x_2+\dots+x_{n+1}) \geq \sqrt[n+1]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n+1}}$$

što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Nejednakost je tačna za sve prirodne brojeve n.

14. Metodom matematičke indukcije dokazati:

a) $1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$, n je prirodan broj.

b) $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $n\in\mathbb{N}$.

c) $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$, $n\in\mathbb{N}$.

d) $2+4+6+\dots+(2n) = n(n+1)$, $n\in\mathbb{N}$.

e) $1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, $a\neq 1$, $n\in\mathbb{N}$.

(#) Dokazati matematičkom indukcijom tvrdnju

$5 \mid (n^5 - n), \quad n \in \mathbb{N}.$

Rj.

$5 \mid (k^5 - k), \quad k \in \mathbb{N}$ (ovo čitamo: pet djeli $k^5 - k$ gdje je k neki privodan broj) čili $k^5 - k$ je djeljivo sa 5)

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $\quad 5 \mid (1^5 - 1)$ tj. $5 \mid 0$ $\quad$ 5 djeli 0 tj. $0 = 5 \cdot s$ gdje je s neki broj iz $\mathbb{N}$.

Tvrdnja je tačna za $k=1$

KORAK INDUKCIJE

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Pretpostavimo da je tvrdnja $5 \mid (k^5 - k)$ tačna za sve brojeve od 1 do n. Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da $5 \mid (n+1)^5 - (n+1)$

$$
\begin{aligned}
(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \underline{+1} - n \underline{-1} = \\
&= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - n = \\
&= \underbrace{(n^5 - n)}_{\text{ovo je prema pretpostavci djeljivo sa } 5} + \underbrace{5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)}_{\text{ovo je djeljivo sa } 5 \text{ (vidi se)}}
\end{aligned}
$$

Prema tome $5 \mid (n+1)^5 - (n+1)$ što je i trebalo pokazati

ZAKLJUČAK

Tvrdnja je tačna za sve privodne brojeve.

Dokazati matematičkom indukcijom da važi

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1+(-1)^{n-1}x^n}{1+x} \quad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}).$$

Rj.: BAZA INDUKCIJE

Dokažimo da je jednakost tačna za broj 1

$$1=\frac{1+(-1)^0x^1}{1+x}=\frac{1+x}{1+x}=1$$

Jednakost je tačna za broj 1.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost $1-x+x^2-\ldots+(-1)^{k-1}x^{k-1}=\frac{1+(-1)^{k-1}x^k}{1+x}$ tačna za sve brojeve k od 1 do n i na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za $n+1$ tj. dokažimo

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nx^n=\frac{1+(-1)^nx^{n+1}}{1+X}$$

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nx^n \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=} \frac{1+(-1)^{n-1}x^n}{1+x}+(-1)^nx^n=$$

$$=\frac{1+(-1)^{n-1}x^n+(-1)^nx^n\cdot(1+x)}{1+x}=\frac{1+[(-1)^{n-1}+(-1)^n(1+x)]x^n}{1+x}=$$

$$=\frac{1+[(-1)^{n-1}(1+(-1)(1+x)]x^n}{1+x}=\frac{1+[(-1)^{n-1}\cdot(1-1-x]x^n}{1+x}=$$

$$=\frac{1+(-1)^{n-1}\cdot(-1)x\cdot x^n}{1+x}=\frac{1+(-1)^nx^{n+1}}{1+x}$$

što je i trebalo dobiti

Jednakost je tačna za $n+1$

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

(#) Matematičkom indukcijom dokazati da je $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ djeljivo sa 17 za svaki prirodan broj n.

Rj. $3\cdot 5^{2k+1}+2^{3k+1}$ djeljivo sa 17, $k\in\mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $3\cdot 5^{2+1}+2^{3+1}=3\cdot 5^3+2^4=3\cdot 125+16=375+16=391$

$391:17=23$
$\underline{34}$
$\;\;51$
$\;\;\underline{51}$
$\;\;//$

Broj 391 jest djeljiv sa 17
Tvrdnja je tačna za broj 1

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je $3\cdot 5^{2k+1}+2^{3k+1}$ djeljivo sa 17 za svaki broj k od 1 do n. Uz pomoć ove pretpostavke dokažimo da je $3\cdot 5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1}$ djeljivo sa 17.

$$3\cdot 5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1}=3\cdot 5^{2n+3}+2^{3n+4}=3\cdot 5^{2n+1}\cdot 5^2+2^{3n+1}\cdot 2^3=$$
$$=25\left(3\cdot 5^{2n+1}\right)+8\left(2^{3n+1}\right)=17\left(3\cdot 5^{2n+1}\right)+8\left(3\cdot 5^{2n+1}\right)+$$
$$+8\left(2^{3n+1}\right)=\underbrace{17\cdot\left(3\cdot 5^{2n+1}\right)}_{\text{vidimo da je ovo djeljivo sa 17}}+8\underbrace{\left(3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}\right)}_{\text{na osnovu pretpostavke ovo je djeljivo sa 17}}$$

Prema tome tvrdnja je tačna za $n+1$, tj.
$3\cdot 5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1}$ je djeljivo sa 17.

ZAKLJUČAK

Tvrdnja je tačna za svaki prirodan broj n.

(#) Dokazati metodom matematičke indukcije da za sve prirodne brojeve n važi

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}.$$

Rj. $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{k^2+3k+2}=\frac{k}{2k+4}$, k je pozitivan cijeli br.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 1+4} \Rightarrow \frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ jednakost je tačna za $k=1$.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je jednakost tačna za $k=1,2,\ldots,n$,

tj. $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{k^2+3k+2}=\frac{k}{2k+4}$, $k=1,2,\ldots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za $n+1$ tj. da je

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2+3(n+1)+2}=\frac{n+1}{2(n+1)+4}$$

$(n+1)^2=n^2+2n+1$

$3(n+1)=3n+3$

ili drugačije napisano $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n^2+5n+6}=\frac{n+1}{2n+6}$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n^2+3n+2}+\frac{1}{n^2+5n+5}\overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=}\frac{n}{2n+4}+\frac{1}{n^2+5n+6}$$

$n^2+5n+6=0$

$D=25-24=1$

$n_{1,2}=\frac{-5\pm 1}{2}$

$n_1=\frac{-6}{2}=-3 \quad n_2=\frac{-4}{2}=-2$

$$=\frac{n}{2(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{n(n+3)+2}{2(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n^2+3n+2}{2(n+2)(n+3)}=\frac{\cancel{(n+2)}(n+1)}{2\cancel{(n+2)}(n+3)}=\frac{n+1}{2n+6}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

(#) Dokazati metodom matematičke indukcije da za sve prirodne brojeve n važi:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

tj. $$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $$\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1\cdot(1+1)}{2(2+1)} \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{3}=\frac{2}{2\cdot 3}=\frac{1}{3}$$

Jednakost je tačna za broj 1

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$ tačna za svako k od 1 do n.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za $n+1$ tj. dokažimo da je

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}.$$

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \underset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)(2n+3)+(n+1)^2\cdot 2}{2(2n+1)(2n+3)}=$$

$$=\frac{(n+1)[n(2n+3)+2(n+1)]}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n^2+3n+2n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n^2+5n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)(n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$ što je i trebalo dobiti

Jednakost je tačna za $n+1$.

ZAKLJUČAK:

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

Dokazati metodom matematičke indukcije da vrijedi za sve $n \in \{2,3,4,\dots\}$:

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}.$$

Rj. postavka zadatka

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{k-1} \cdot \log_x 2^k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}, \quad k = 2,3,\dots$$

BAZA INDUKCIJE

$k=2$: $$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 2} = \frac{1}{\log_x 2 \cdot 2\log_x 2} = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4}$$

Tvrdnja je tačna za $k=2$.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost $\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{k-1} \cdot \log_x 2^k} = \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}$ tačna za svako $k = 2,3,\dots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} + \frac{1}{\log_x 2^n \cdot \log_x 2^{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} + \frac{1}{\log_x 2^n \cdot \log_x 2^{n+1}} \underset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2} + \frac{1}{\log_x 2^n \cdot \log_x 2^{n+1}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2} + \frac{1}{n\cdot(n+1)\log_x 2 \cdot \log_x 2}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2} + \frac{1}{n(n+1)(\log_x 2)^2} = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

$$= \left(1 + \frac{-(n+1)+1}{n(n+1)}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(1 + \frac{-n}{n(n+1)}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve brojeve $n \in \{2,3,4,\dots\}$

\# Dokazati matematičkom indukcijom tvrdnju

$7 \mid (n^7 - n)$, $n \in \mathbb{N}$.

R:

BAZA INDUKCIJE

Dokažimo da je tvrdnja tačna za broj 1.

$n=1$: $n^7 - n = 1^7 - 1 = 0$, $7 \mid 0$ (7 dijeli 0)

$0 = 7 \cdot 0$ Tvrdnja je tačna za broj 1.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za brojeve od 1 do n tj. $7 \mid (k^7 - k)$ za $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$. Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je tvrdnja tačna za $n+1$ tj: da $7 \mid [(n+1)^7 - (n+1)]$.

$$n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^3-1)(n^3+1) = \underline{\underline{n}}(n-1)\underline{(n^2+n+1)}\underline{\underline{(n+1)}}(n^2-n+1)$$

$$(n+1)^7 - (n+1) = (n+1)\left[(n+1)^6 - 1\right] = (n+1)\left[(n+1)^3 - 1\right]\left[(n+1)^3 + 1\right] =$$

$$= (n+1)\left[(n+1)-1\right]\left[(n+1)^2 + n+1 + 1\right]\left[(n+1)+1\right]\left[(n+1)^2 - (n+1) + 1\right]$$

$$= \underline{\underline{(n+1)}}\,\underline{\underline{n}}\,(n^2+3n+3)(n+2)\underline{(n^2+n+1)}$$

Pronađimo vezu između $(n-1)(n^2-n+1)$ i $(n^2+3n+3)(n+2)$

$$\left.\begin{aligned} &(n-1)(n^2-n+1) = n^3 - n^2 + n - n^2 + n - 1 = n^3 - 2n^2 + 2n - 1 \\ &(n+2)(n^2+3n+3) = n^3 + \underline{3n^2} + \underline{\underline{3n}} + \underline{2n^2} + \underline{\underline{6n}} + 6 = n^3 + 5n^2 + 9n + 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+2)(n^2+3n+3) = (n-1)(n^2-n+1) - 7n^2 - 7n - 7$$

pa imamo: $(n+1)^7 - (n+1) = (n+1)n(n^2+n+1)\left[(n-1)(n^2-n+1) - 7(n^2+n+1)\right]$

$$= (n+1)n(n^2+n+1)(n-1)(n^2-n+1) - 7(n+1)n(n^2+n+1)^2$$

$$= \underbrace{(n^7 - n)}_{A} - \underbrace{7n(n+1)(n^2+n+1)^2}_{B}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ je prema pretpostavci djeljivo sa } 7 \\ B \text{ je očigledno djeljivo sa } 7 \end{array}\right\} \Rightarrow (n+1)^7 - (n+1) \text{ je djeljivo sa } 7 \text{ tj. } 7 \mid (n+1)^7 - (n+1)$$

ZAKLJUČAK

Tvrdnja $7 \mid (n^7 - n)$ je tačna za sve prirodne brojeve